LEZIONE 4

DEFINIZIONE DI FUNZIONE "p VOLTE" CONTINUAMENTE DIFFERENZIABILE

DATA LA FUNZIONE $f(x)$, CON $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, DIREMO CHE $f(x)$ È p VOLTE CONTINUAMENTE DIFFERENZIABILE SULL'INSIEME CHIUSO A, SE NELL'INSIEME APERTO B, CON $A \subset B$, ESISTONO CONTINUE LE DERIVATE PARZIALI / MISTE DELLA $f(x)$ FINO ALL'ORDINE p.

- 2 ENTITÀ UTILIZZATE PER DESCRIVERE FUNZIONI 2 VOLTE CONTINUAMENTE DIFFERENZIABILI:

① f 1 VOLTA CONT. DIFF.: ESISTONO LE DERIVATE PRIME E QUESTE SONO CONTINUE.
IL VETTORE DELLE DERIVATE PRIME È DEFINITO "VETTORE GRADIENTE, $\nabla f(x)$"

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

② f 2 VOLTE CONT. DIFF.: ESISTONO LE DERIVATE SECONDE E SONO CONTINUE.
LA MATRICE DELLE DERIVATE SECONDE È DEFINITA "MATRICE HESSIANA, $\nabla^2 f(x)$"

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE DI REGOLARITÀ DI UN PUNTO

DATA LA FUNZIONE $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, CON INSIEME DI DEFINIZIONE $A \subseteq \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE IL PUNTO $\bar{x} \in A$ È DI REGOLARITÀ PER LA $f(x)$ SE $\nabla f(\bar{x})$ RISULTA ESSERE DEFINITO

- IN SINTESI: UN PUNTO È REGOLARE SE f È DERIVABILE IN QUEL PUNTO E LA DERIVATA (SEMPRE IN QUEL PUNTO) È $\neq 0$. NOTA: NON SERVE CHE f SIA CONTINUA

ESEMPIO CON $\mathbb{R}^2$: $f(x, y) = x^2 + y^2$

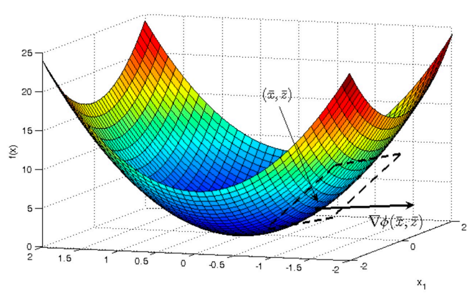
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

VEDIAMO SE IL PUNTO $(0,0)$ O $(1,1)$ SONO REGOLARI:

$f'_x(0) = 0$, $f'_y(0) = 0 \to f'(0,0) = (0,0) \Rightarrow$ PUNTO NON REGOLARE

$f'_x(1) = 2$, $f'_y(1) = 2 \to f'(1,1) = (2,2) \Rightarrow$ PUNTO REGOLARE!

ESEMPIO DI GRADIENTE:



SE IL PIANO TANGENTE FOSSE SUL PUNTO DI MINIMO (SOTTO) ALLORA LE DERIVATE SI ANNULLEREBBERO.

Figura 8: Il gradiente $\nabla\phi(\bar{x}, \bar{z})$ risulta essere ortogonale al piano tangente (*tratteggiato*) alla superficie $z - f(x) = \bar{c}$, con $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2$ e $\bar{c} = 0$, nel punto $(\bar{x}, \bar{z}) = (0, -1, 4)$.

DEFINIZIONE DI INTORNO

DATO IL PUNTO $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, DEFINIAMO INTORNO DI $\bar{x}$ DI AMPIEZZA δ (>0), INDICATO COME $I(\bar{x}, \delta)$, L'INSIEME

$$I(\bar{x}, \delta) = \{ x \in \mathbb{R}^m : \| x - \bar{x} \| \leq \delta \}$$

DIREMO POI CHE L'INTORNO $I(\bar{x}, \delta)$ È APERTO SE È DEFINITO MEDIANTE LA

$$I(\bar{x}, \delta) = \{ x \in \mathbb{R}^m : \| x - \bar{x} \| < \delta \}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

DATA LA FUNZIONE $f(x)$ SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUAMENTE DIFFERENZIABILE NELL'INTORNO APERTO $I(x, \overset{\text{RO}}{\rho}) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \| y - x \| < \rho \} \subseteq \mathbb{R}^n$, CON $x \in \mathbb{R}^n$ E $\rho > 0$. ESISTE UN VALORE $\theta \in [0,1]$ TALE CHE PER OGNI $y \in I(x, \rho)$:

1) $f(y) = f(x) + \nabla f [x + \theta (y - x)]^T (y - x)$,

2) $f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \underbrace{o(\| y - x \|)}$,

DOVE PER DEFINIZIONE

$$\lim_{y \to x} \frac{o(\| y - x \|)}{\| y - x \|} = 0$$

→ QUANDO $\| y - x \|$ TENDE A ZERO, POSSO IGNORARE $o(\| y - x \|)$

NOTA! y DEVE ESSERE ABBASTANZA VICINO AD x

1 - $[x + \theta (y - x)]$ VARIA TRA x ED y CON $\theta \in [0,1]$ QUINDI IO NON CONOSCO $f(y)$ MA CONOSCO $f(x)$ E TUTTI I VALORI CHE STANNO NEL MEZZO

→ FACCIO PREDIZIONE / APPROSIMAZIONE DI COSA SUCCEDE VICINO A y.

IN SINTESI (1): $\exists \, \theta \in [0,1]$ CHE RENDE LA FORMULA ESATTA, MA CHE NON POSSO DETERMINARE SENZA CONOSCERE ∇f O $f(y)$. PER MIGLIORARE LA PRECISIONE, DOVREI CONTINUARE A DERIVARE.

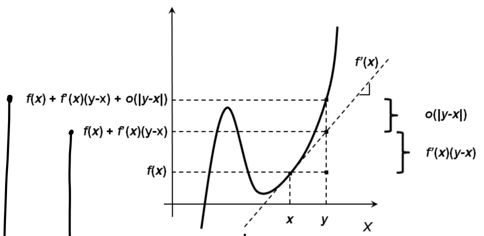
ESEMPIO TH. VALOR MEDIO

$\mathbb{R}^1$: CLASSICO TH. TAYLOR.

$x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0,1]$

1. $f(y) = f(x) + f'[x + \theta (y - x)](y - x)$
2. $f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + o(|y - x|)$ DOVE $\displaystyle\lim_{y \to x} \frac{o(|y - x|)}{y - x} = 0$

ESEMPIO GEOMETRICO



f CONT. DIFF. IN UN INTORNO DI x CHE COMPRENDE y.

TANGENTE AL PUNTO $f(x)$ OSSIA $f'(x)$

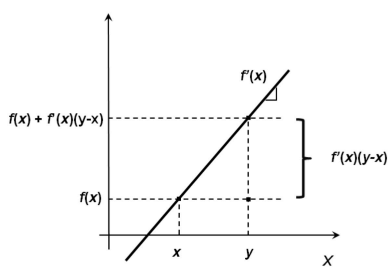
CORREZIONE LINEARE PER STIMARE $f(y)$ PARTENDO DA x

→ APPROSSIMAZIONE LINEARE (RETTA TANGENTE) DI $f(y)$

LEZIONE 5

- PER POTER IGNORARE L'ERRORE $o\| y - x \|$ DEVO AVERE CHE LA FUNZIONE SI COMPORTI LINEARMENTE → SI COMPORTA COME UNA RETTA / LA FUNZIONE SI "SCHIACCIA" SULLA RETTA TANGENTE FINO A COINCIDERE CON ESSA:

NELLA SEGUENTE IMMAGINE OSSERVIAMO PROPRIO QUESTO FENOMENO, CON $f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) = f(x) + f'(x)(y - x) + o(\| y - x \|)$



DOPO AVER VISTO IL TH. DEL VALOR MEDIO PER f CONT. DIFF. UNA VOLTA, POSSIAMO GENERALIZZARLO ANCHE A 2 VOLTE:

TH. VALOR. MEDIO 2 VOLTE CONT. DIFF.

Teorema 3.3 *Data la funzione $f(x)$ sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile nell'intorno aperto $I(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \rho\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $\rho > 0$. Esiste un valore $\theta \in [0,1]$ tale che per ogni $y \in I(x, \rho)$*

1. $f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2} (y - x)^T \nabla^2 f[x + \theta (y - x)](y - x)$,
2. $f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2} (y - x)^T \nabla^2 f(x)(y - x) + o(\|y - x\|^2)$,

ove per definizione

$$\lim_{y \to x} \frac{o(\|y - x\|^2)}{\|y - x\|^2} = 0.$$

- AGGIUNTA DI MATRICE HESSIANA E DERIVATE SECONDE
- PRIMA IL VALORE INTERMEDIO STAVA NEL GRADIENTE, ORA STA NELLA HESSIANA

PROPOSIZIONE : DERIVATA DIREZIONALE

SIA $f(x)$ UNA VOLTA CONT. DIFF. IN $\mathbb{R}^n$. SI DICE CHE LA FUNZIONE $f(x)$ AMMETTE NEL PUNTO $\underbrace{\bar{x}}_{\neq \bar{0}} \in \mathbb{R}^n$ LA DERIVATA DIREZIONALE $\underbrace{D(f,d)}_{\text{DERIVATA DIREZ. DELLA FUNZIONE } f \text{ CON DIREZ. } d \text{ NEL PUNTO FISSATO } \bar{x}}$, LUNGO LA DIREZIONE $d \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, SE ESISTE IL LIMITE

$$D(f,d) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(\overbrace{x+\alpha d}^{\text{VETT. IN } \mathbb{R}^n}) - \overbrace{f(x)}^{\text{N° REALE}}}{\underbrace{\alpha}_{\text{N° REALE}}}$$

VALE IL SEGUENTE RISULTATO :

$$D(f,d) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x+\alpha d) - f(x)}{\alpha} = \boxed{\nabla f(x)^T d} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot d_i$$

- DIMOSTRAZIONE :

$$f(y) - f(x) = \nabla f(x)^T (y-x) + o(\|y-x\|)$$

SCELGO $y = x + \alpha d$ CON $\alpha > 0$ LIMITATO E $d \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x+\alpha d) - f(x) = \alpha \nabla f(x)^T d + o(\|\alpha d\|)$$

DIVIDO PER α E PASSO AL LIMITE PER $\alpha \to 0^+$: (E MOLT. L'ULTIMO TERMINE PER $\|d\|$ AL DENOM. E NUM.)

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x+\alpha d) - f(x)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0^+} \nabla f(x)^T d + \lim_{\alpha \to 0^+} \underbrace{\frac{o(\|\alpha d\|)}{\alpha \|d\|}}_{\text{TENDE A ZERO PER } \alpha \to 0 \text{ NUM. PIÙ VELOCE DEL DENOM.}} \|d\| = \nabla f(x)^T d$$

- SE LA FUNZIONE È LINEARE (O "UGUALE" ALLA RETTA TANGENTE) POSSO DIRE CHE : $D(f,d) = f(x+d) - f(x)$ TOGLIENDO $-o(\|d\|)$
  - LA DERIVATA DIREZIONALE IN QUESTO CASO RAPPRESENTA LA VARIAZIONE DELLA FUNZIONE DA UN PUNTO A UN ALTRO
  - MINIMIZZARE COME OBIETTIVO LA DERIVATA DIREZIONALE